ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φεβρουάριος 2012

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). Οι επιτυχόντες στην εξέταση προόδου, μπορούν να γράψουν μόνο τα θέματα: 3β, 4 και 5. **Καλή Επιτυχία.**

<u>Θέμα 1</u> : α) Αν $x, y, z \in R^n$ είναι είναι ορθογώνια μεταξύ των με $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|z\|_2$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $x+z$, $x-y-z$ και $x+2y-z$ είναι ορθογώνια μεταξύ των.
β) Αν $A \in R^{n,n}$ είναι συμμετρικός πίνακας και $Q \in R^{n,n}$ ορθογώνιος, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $QA + AQ^T$ είναι συμμετρικός και ότι $\|QA + AQ^T\|_2 \leq 2\rho(A)$.

<u>Θέμα 2</u> : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των
α) η μέθοδος Jacobi,
β) η μέθοδος Gauss-Seidel και
γ) η βέλτιστη μέθοδος παρεκβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel.

<u>Θέμα 3</u> : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

α) Να αποδειχτεί ότι η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει και να γίνουν δυο επαναλήψεις αυτής με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$.
β) Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$.
(Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

<u>Θέμα 4</u> : α) Να αποδείξετε ότι τα δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο $r^{(k-1)}$ και $r^{(k)}$ της μεθόδου απότομης καθόδου, είναι ορθογώνια μεταξύ των.
β) Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και $b = (0 \ -3 \ 3 \ 3)^T$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

<u>Θέμα 5</u> : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίστροφων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $z^{(0)} = (0 \ 1 \ 0)^T$. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την παραγοντοποίηση Cholesky. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)